ALGORITMOS PARA REPRESENTACIONES GLOBALES FINITAS

Gonzalo Zigarán

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
Universidad Nacional de Córdoba Argentina

virtUMA 2020
Sesión 7: Lógica y Computabilidad

Motivación

- ¿Por qué estudiar las representaciones globales?

Motivación

- ¿Por qué estudiar las representaciones globales?
    - Estudio de propiedades dentro de una clase

Motivación

- ¿Por qué estudiar las representaciones globales?
  - Estudio de propiedades dentro de una clase
  - Identificar elementos indescomponibles

Motivación

- ¿Por qué estudiar las representaciones globales?
  - Estudio de propiedades dentro de una clase
  - Identificar elementos indescomponibles
  - Preservación de propiedades existenciales

$$\forall \bar{x}\ \exists! \bar{z}\ \bigwedge_{i=1}^{k} s_i(\bar{x}, \bar{z}) = t_i(\bar{x}, \bar{z})$$

Motivación

- ¿Por qué estudiar las representaciones globales?
  - Estudio de propiedades dentro de una clase
  - Identificar elementos indescomponibles
  - Preservación de propiedades existenciales

$$\forall \bar{x}\ \exists ! \bar{z}\ \bigwedge_{i=1}^{k} s_i(\bar{x}, \bar{z}) = t_i(\bar{x}, \bar{z})$$

- ¿Por qué y para qué desarrollar algoritmos para decidir descomposición global?

Motivación

- ¿Por qué estudiar las representaciones globales?
  - Estudio de propiedades dentro de una clase
  - Identificar elementos indescomponibles
  - Preservación de propiedades existenciales

$$\forall \bar{x}\ \exists ! \bar{z}\ \bigwedge_{i=1}^{k} s_i(\bar{x}, \bar{z}) = t_i(\bar{x}, \bar{z})$$

- ¿Por qué y para qué desarrollar algoritmos para decidir descomposición global?
  - Encontrar ejemplos de representaciones

Motivación

- ¿Por qué estudiar las representaciones globales?
  - Estudio de propiedades dentro de una clase
  - Identificar elementos indescomponibles
  - Preservación de propiedades existenciales

$$\forall \bar{x}\ \exists! \bar{z}\ \bigwedge_{i=1}^{k} s_i(\bar{x}, \bar{z}) = t_i(\bar{x}, \bar{z})$$

- ¿Por qué y para qué desarrollar algoritmos para decidir descomposición global?
  - Encontrar ejemplos de representaciones
  - Para el caso de álgebras finitas, hay resultados teóricos que se pueden traducir en algoritmos

Representaciones Globales

Definición

Un producto subdirecto $\mathsf{A} \subseteq \prod\{\mathsf{A_i} : i \in I\}$ es *global* cuando se cumple la siguiente propiedad:

PP *(Patchwork Property)* Si $\{F_r : r \in R\} \subseteq \tau_E^{\mathsf{A}}$, es un cubrimiento de I, y si x_r, con $r \in R$, son elementos de A tales que para cada $r, s \in R$, x_r y x_s coinciden en $F_r \cap F_s$, entonces existe un $x \in \mathsf{A}$ tal que $x(i) = x_r(i)$, cada vez que $i \in F_r$.

τ_E^{A} es la topología generada por los ecualizadores $E(x, y)$, con $x, y \in \mathsf{A}$, definidos como:

$$E(x, y) = \{i \in I : x(i) = y(i)\}$$

Representaciones Globales

Definición
Un producto subdirecto $\mathsf{A} \subseteq \prod\{\mathsf{A_i} : i \in I\}$ es *global* cuando se cumple la siguiente propiedad:

PP *(Patchwork Property)* Si $\{F_r : r \in R\} \subseteq \tau_E^{\mathsf{A}}$, es un cubrimiento de I, y si x_r, con $r \in R$, son elementos de A tales que para cada $r, s \in R$, x_r y x_s coinciden en $F_r \cap F_s$, entonces existe un $x \in \mathsf{A}$ tal que $x(i) = x_r(i)$, cada vez que $i \in F_r$.

τ_E^{A} es la topología generada por los ecualizadores $E(x, y)$, con $x, y \in \mathsf{A}$, definidos como:

$$E(x, y) = \{i \in I : x(i) = y(i)\}$$

Dado un álgebra A y un conjunto $\Sigma \subseteq Con(\mathsf{A})$, decimos que Σ es un **espectro global** si $\mathsf{A} \subseteq \prod\{\mathsf{A}/\theta : \theta \in \Sigma\}$ es un producto global.

Definición

Un álgebra $\mathbf{A}$ es *relativamente globalmente indescomponible* (RGI) en una cuasivariedad $\mathcal{Q}$ si para todo producto subdirecto global $\mathbf{B} \subseteq \prod\{\mathbf{A_i} : i \in I\}$ tal que $\mathbf{B} \simeq \mathbf{A}$ y $\{\mathbf{A_i} : i \in I\} \subseteq \mathcal{Q}$, existe $i \in I$ tal que $\pi_i : \mathbf{B} \to \mathbf{A_i}$ es un isomorfismo.

Representaciones Globales

Definición

Un álgebra A es *relativamente globalmente indescomponible* (RGI) en una cuasivariedad $\mathcal{Q}$ si para todo producto subdirecto global $\mathsf{B} \subseteq \prod\{\mathsf{A_i} : i \in I\}$ tal que $\mathsf{B} \simeq \mathsf{A}$ y $\{\mathsf{A_i} : i \in I\} \subseteq \mathcal{Q}$, existe $i \in I$ tal que $\pi_i : \mathsf{B} \to \mathsf{A_i}$ es un isomorfismo.

Ejemplos

- La cadena de $\mathbf{2}$ elementos es la única álgebra de Boole globalmente indescomponible.
- Las cadena de $\mathbf{2}$ y $\mathbf{3}$ elementos son los únicos reticulados distributivos globalmente indescomponible.

Problemas Computacionales

1. Dada un álgebra $\mathbf{A}$ y un conjunto $\Sigma \subseteq Con(\mathbf{A})$, decidir si el conjunto Σ es un espectro global.
2. Dada un álgebra $\mathbf{A}$ y un conjunto $\Sigma \subseteq Con(\mathbf{A})$, decidir si existe algún subconjunto $\Gamma \subseteq \Sigma$, tal que Γ sea un espectro global.
3. Dada un álgebra $\mathbf{A}$ decidir si es globalmente indescomponible.

Avances teóricos (caso $\mathbf{A}$ finito)

Lema

Dada un álgebra $\mathbf{A}$ finita y un conjunto $\Sigma \subseteq Con(\mathbf{A})$, entonces son equivalentes:

1. Σ es un espectro global
2. $\langle \Sigma \rangle$ satisface el teorema chino del resto con respecto a Σ

AVANCES TEÓRICOS (CASO **A** FINITO)

Lema
Dada un álgebra $\mathbf{A}$ finita y un conjunto $\Sigma \subseteq Con(\mathbf{A})$, entonces son equivalentes:

1. Σ es un espectro global
2. $\langle \Sigma \rangle$ satisface el teorema chino del resto con respecto a Σ

Un proyectivo $\mathcal{C}$ satisface el *teorema chino del resto con respecto a* Σ si cada sistema $(\theta_1, \ldots, \theta_n, x_1, \ldots, x_n)$ sobre $\mathcal{C}$, tal que $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ minoriza Σ, tiene solución.

Σ *minoriza* Γ cuando para cada $\theta \in \Gamma$ existe $\delta \in \Sigma$ tal que $\delta \subseteq \theta$.

Avances teóricos (caso **A** finito)

Lema

Dada un álgebra $\mathbf{A}$ finita y un conjunto $\Sigma \subseteq Con(\mathbf{A})$. Sean $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ las minimales de Σ, entonces son equivalentes:

1. Σ es un espectro global
2. $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{A}$ tal que $(\theta_1, \ldots, \theta_n, x_1, \ldots, x_n)$ es sitema de congruencias sobre $\langle \Sigma \rangle$, el sistema tiene solución.

Problema
INPUT: Dada un álgebra $\mathbf{A}$ finita y un conjunto $\Sigma \subseteq Con(\mathbf{A})$.
OUTPUT: Decidir si Σ es un espectro global

Problema

INPUT: Dada un álgebra $\mathbf{A}$ finita y un conjunto $\Sigma \subseteq Con(\mathbf{A})$.
OUTPUT: Decidir si Σ es un espectro global

- Este problema está dentro de coNP, ¿es coNP-completo?

Problema
INPUT: Dada un álgebra $\mathbf{A}$ finita y un conjunto $\Sigma \subseteq Con(\mathbf{A})$.
OUTPUT: Decidir si Σ es un espectro global

- Este problema está dentro de coNP, ¿es coNP-completo?
- ¿Existen restricciones que conviertan al problema en polinomial?

¡Muchas gracias!