ALGORITMOS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE SUBESPECTROS GLOBALES

Gonzalo Zigarán

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
Universidad Nacional de Córdoba

Coautores: *M. Campercholi (FaMAF, UNC), D. Vaggione (FaMAF, UNC), P. Ventura (FaMAF, UNC)*

Congreso Monteiro 2021
Lógica

Motivación

- ¿Por qué estudiar las representaciones globales?
  - Aplicaciones teóricas interesantes:

Motivación

- ¿Por qué estudiar las representaciones globales?
  - Aplicaciones teóricas interesantes:
    - Teoremas tipo Nachbin

Motivación

- ¿Por qué estudiar las representaciones globales?
  - Aplicaciones teóricas interesantes:
    - Teoremas tipo Nachbin
    - Generalización del Teorema de Baker-Pixley

Motivación

- ¿Por qué estudiar las representaciones globales?
  - Aplicaciones teóricas interesantes:
    - Teoremas tipo Nachbin
    - Generalización del Teorema de Baker-Pixley
- ¿Por qué desarrollar algoritmos para decidir descomposición global?

Motivación

- ¿Por qué estudiar las representaciones globales?
  - Aplicaciones teóricas interesantes:
    - Teoremas tipo Nachbin
    - Generalización del Teorema de Baker-Pixley
- ¿Por qué desarrollar algoritmos para decidir descomposición global?
  - Es muy difícil encontrar globales

Motivación

- ¿Por qué estudiar las representaciones globales?
  - Aplicaciones teóricas interesantes:
    - Teoremas tipo Nachbin
    - Generalización del Teorema de Baker-Pixley
- ¿Por qué desarrollar algoritmos para decidir descomposición global?
  - Es muy difícil encontrar globales
  - Para ejemplos chicos ya es difícil hacer las cuentas

Sistema de Congruencias

Un proyectivo $\mathcal{C}$ satisface el *teorema chino del resto con respecto a* Σ si cada sistema $(\theta_1, \ldots, \theta_n, x_1, \ldots, x_n)$ sobre $\mathcal{C}$, tal que $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ minoriza Σ, tiene solución.

Σ *minoriza* Γ cuando para cada $\theta \in \Gamma$ existe $\delta \in \Sigma$ tal que $\delta \subseteq \theta$.

Un proyectivo $\mathcal{C}$ satisface el *teorema chino del resto con respecto a* Σ si cada sistema $(\theta_1, \ldots, \theta_n, x_1, \ldots, x_n)$ sobre $\mathcal{C}$, tal que $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ minoriza Σ, tiene solución.

Σ *minoriza* Γ cuando para cada $\theta \in \Gamma$ existe $\delta \in \Sigma$ tal que $\delta \subseteq \theta$.

Lema

Dada un álgebra $\mathbf{A}$ finita y un conjunto $\Sigma \subseteq Con(\mathbf{A})$, entonces son equivalentes:

1. Σ es un espectro global
2. $\langle \Sigma \rangle$ satisface el teorema chino del resto con respecto a Σ

Subespectros Globales

Lema

Dada un álgebra $\mathbf{A}$ finita y un conjunto $\Sigma \subseteq Con(\mathbf{A})$ tal que para cada $\theta, \delta \in \Sigma$ tenemos que $\theta \sqcup^{\langle \Sigma \rangle} \delta \in \Sigma \cup \{\nabla\}$, entonces son equivalentes:

1. Hay un $\Gamma \subseteq \Sigma$ tal que $\bigcap \Gamma = \Delta$ y Γ es un espectro global para $\mathbf{A}$.
2. Hay $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \Sigma$ tal que:
   a. $\gamma_1 \cap \ldots \cap \gamma_k = \Delta$
   b. $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ es una anticadena, es decir, $\gamma_i \subseteq \gamma_j$ si y solo si $i = j$
   c. Todo sistema $\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_k; x_1, \ldots, x_k \rangle$ sobre $\langle \Sigma \rangle$ tiene solución

Lema

Dada un álgebra $\mathbf{A}$ finita y un conjunto $\Sigma \subseteq Con(\mathbf{A})$ tal que para cada $\theta, \delta \in \Sigma$ tenemos que $\theta \sqcup^{\langle\Sigma\rangle} \delta \in \Sigma \cup \{\nabla\}$, entonces son equivalentes:

1. Hay un $\Gamma \subseteq \Sigma$ tal que $\bigcap \Gamma = \Delta$ y Γ es un espectro global para $\mathbf{A}$.
2. Hay $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \Sigma$ tal que:
   a. $\gamma_1 \cap \ldots \cap \gamma_k = \Delta$
   b. $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ es una anticadena, es decir, $\gamma_i \subseteq \gamma_j$ si y solo si $i = j$
   c. Todo sistema $\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_k; x_1, \ldots, x_k \rangle$ sobre $\langle \Sigma \rangle$ tiene solución

Observaciones

1. $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ de **2.** no son necesariamente un espectro global de $\mathbf{A}$.

Lema

Dada un álgebra $\mathbf{A}$ finita y un conjunto $\Sigma \subseteq Con(\mathbf{A})$ tal que para cada $\theta, \delta \in \Sigma$ tenemos que $\theta \sqcup^{\langle\Sigma\rangle} \delta \in \Sigma \cup \{\nabla\}$, entonces son equivalentes:

1. Hay un $\Gamma \subseteq \Sigma$ tal que $\bigcap \Gamma = \Delta$ y Γ es un espectro global para $\mathbf{A}$.
2. Hay $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Sigma$ tal que:
   a. $\gamma_1 \cap \dots \cap \gamma_k = \Delta$
   b. $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ es una anticadena, es decir, $\gamma_i \subseteq \gamma_j$ si y solo si $i = j$
   c. Todo sistema $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_k; x_1, \dots, x_k \rangle$ sobre $\langle \Sigma \rangle$ tiene solución

Observaciones

1. $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ de **2.** no son necesariamente un espectro global de $\mathbf{A}$.
2. Dados $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ de **2.**, los siguientes son espectros globales de $\mathbf{A}$:
   - $\Gamma = \{\gamma_i \sqcup^{\langle\Sigma\rangle} \gamma_j : i, j = 1, \dots, k\} \setminus \{\nabla\}$
   - $\Gamma = \{\bigsqcup^{\langle\Sigma\rangle}_{\gamma \in F} \gamma : F \subseteq \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}\} \setminus \{\nabla\}$

Algoritmo para subespectros

Idea para generar todas las posibles $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$:

Idea para generar todas las posibles $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$:

- Generar tuplas de congruencias recursivamente.

Algoritmo para subespectros

Idea para generar todas las posibles $\gamma_1, \dots, \gamma_k$:

- Generar tuplas de congruencias recursivamente.
- Además, para cada tupla, guardar los sistemas que no tienen solución.

Algoritmo para subespectros

Idea para generar todas las posibles $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$:

- Generar tuplas de congruencias recursivamente.
- Además, para cada tupla, guardar los sistemas que no tienen solución.
- En cada paso, para cada tupla, agregar una congruencia nueva solo si es anticadena de las congruencias de la tupla.

Algoritmo para subespectros

Idea para generar todas las posibles $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$:

- Generar tuplas de congruencias recursivamente.
- Además, para cada tupla, guardar los sistemas que no tienen solución.
- En cada paso, para cada tupla, agregar una congruencia nueva solo si es anticadena de las congruencias de la tupla.
- Con la tupla nueva, generar todos los sistemas que no tienen solución, aprovechando los sistemas del paso anterior.

Algoritmo para subespectros

Idea para generar todas las posibles $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$:

- Generar tuplas de congruencias recursivamente.
- Además, para cada tupla, guardar los sistemas que no tienen solución.
- En cada paso, para cada tupla, agregar una congruencia nueva solo si es anticadena de las congruencias de la tupla.
- Con la tupla nueva, generar todos los sistemas que no tienen solución, aprovechando los sistemas del paso anterior.

Observación

Si x es solución del sistema $(\theta_1, \ldots, \theta_n, x_1, \ldots, x_n)$, entonces el sistema es equivalente a $(\theta_1, \ldots, \theta_n, x, \ldots, x)$

Algoritmo para subespectros

function $\texttt{AllGlobalKernels}(A, \Sigma = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\})$

  $Output \leftarrow \emptyset$

  $H \leftarrow ((), \langle\rangle)$

  for $\theta \in \Sigma$ **do**

    for $(\Gamma, S) \in H$ **do**

      if $Antichain(\Gamma, \theta)$ **then**

        $\widetilde{S} \leftarrow ExtendConstantSys(\Gamma, \theta)$

        for $\overline{\mathrm{x}} \in S$ **do**

          $\widetilde{S} \leftarrow \widetilde{S} \cup ExtendNonsolSys(\langle \Gamma, \overline{\mathrm{x}} \rangle, \theta)$

        if $\theta \cap \Gamma = \Delta$ and $\widetilde{S} = \emptyset$ **then**

          Add $\Gamma \cup \{\theta\}$ to $Output$

        Add $\left(\Gamma \cup \{\theta\}, \widetilde{S}\right)$ to H

  return $Output$

Semireticulados

Un semireticulado es un álgebra $S = (S; \wedge)$ que satisface:

- $x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z$
- $x \wedge y \approx y \wedge x$
- $x \wedge x \approx x$

Semireticulados

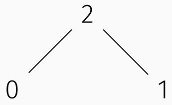
Un semireticulado es un álgebra $S = (S; \wedge)$ que satisface:

- $x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z$
- $x \wedge y \approx y \wedge x$
- $x \wedge x \approx x$

Ejemplos de globalmente indescomponibles conocidos:

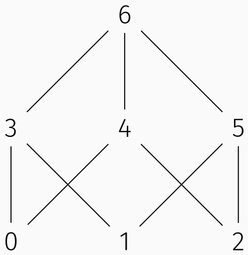
2

3



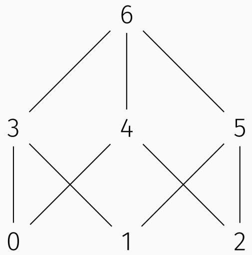
C

Semireticulados: Caso de estudio



A

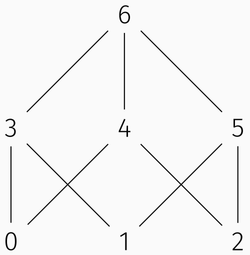
Semireticulados: Caso de estudio



A

- ¿Es globalmente indescomponible?

Semireticulados: Caso de estudio



A

- ¿Es globalmente indescomponible?
- En caso de que no, ¿Tiene una representación global con factores globalmente indescomponibles?

- ¿Tiene una representación con factores en $\{2, 3, C\}$?

Semireticulados: Caso de estudio

- ¿Tiene una representación con factores en $\{2, 3, C\}$?
  - Nos generamos $\Sigma = \{\theta : A/\theta \simeq B \text{ para } B \in \{2, 3, C\}\}$

Semireticulados: Caso de estudio

- ¿Tiene una representación con factores en $\{\mathsf{2}, \mathsf{3}, \mathsf{C}\}$?
  - Nos generamos $\Sigma = \{\theta : \mathsf{A}/\theta \simeq \mathsf{B} \text{ para } \mathsf{B} \in \{\mathsf{2}, \mathsf{3}, \mathsf{C}\}\}$
  - Ejecutamos $\mathtt{AllGlobalKernels}(\mathsf{A}, \Sigma)$

Semireticulados: Caso de estudio

- ¿Tiene una representación con factores en $\{\mathsf{2}, \mathsf{3}, \mathsf{C}\}$?
  - Nos generamos $\Sigma = \{\theta : \mathsf{A}/\theta \simeq \mathsf{B}$ para $\mathsf{B} \in \{\mathsf{2}, \mathsf{3}, \mathsf{C}\}\}$
  - Ejecutamos $\mathtt{AllGlobalKernels}(\mathsf{A}, \Sigma)$
  - Obtenemos un conjunto vacío, entonces no tiene representación global con factores indescomponibles

Semireticulados: Caso de estudio

- ¿Tiene una representación con factores en $\{\mathsf{2}, \mathsf{3}, \mathsf{C}\}$?
  - Nos generamos $\Sigma = \{\theta : \mathsf{A}/\theta \simeq \mathsf{B} \text{ para } \mathsf{B} \in \{\mathsf{2}, \mathsf{3}, \mathsf{C}\}\}$
  - Ejecutamos $\mathtt{AllGlobalKernels}(\mathsf{A}, \Sigma)$
  - Obtenemos un conjunto vacío, entonces no tiene representación global con factores indescomponibles
- ¿Es globalmente indescomponible?

Semireticulados: Caso de estudio

- ¿Tiene una representación con factores en $\{\mathsf{2}, \mathsf{3}, \mathsf{C}\}$?
  - Nos generamos $\Sigma = \{\theta : \mathsf{A}/\theta \simeq \mathsf{B}$ para $\mathsf{B} \in \{\mathsf{2}, \mathsf{3}, \mathsf{C}\}\}$
  - Ejecutamos $\mathtt{AllGlobalKernels}(\mathsf{A}, \Sigma)$
  - Obtenemos un conjunto vacío, entonces no tiene representación global con factores indescomponibles
- ¿Es globalmente indescomponible?
  - Nos generamos $Con(\mathsf{A})$, las congruencias de A

- ¿Tiene una representación con factores en $\{\mathsf{2}, \mathsf{3}, \mathsf{C}\}$?
  - Nos generamos $\Sigma = \{\theta : \mathsf{A}/\theta \simeq \mathsf{B} \text{ para } \mathsf{B} \in \{\mathsf{2}, \mathsf{3}, \mathsf{C}\}\}$
  - Ejecutamos $\mathtt{AllGlobalKernels}(\mathsf{A}, \Sigma)$
  - Obtenemos un conjunto vacío, entonces no tiene representación global con factores indescomponibles
- ¿Es globalmente indescomponible?
  - Nos generamos $Con(\mathsf{A})$, las congruencias de A
  - Ejecutamos $\mathtt{AllGlobalKernels}(\mathsf{A}, Con(\mathsf{A}))$

Semireticulados: Caso de estudio

- ¿Tiene una representación con factores en $\{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{C}\}$?
  - Nos generamos $\Sigma = \{\theta : \mathbf{A}/\theta \simeq \mathbf{B} \text{ para } \mathbf{B} \in \{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{C}\}\}$
  - Ejecutamos $\mathtt{AllGlobalKernels}(\mathbf{A}, \Sigma)$
  - Obtenemos un conjunto vacío, entonces no tiene representación global con factores indescomponibles
- ¿Es globalmente indescomponible?
  - Nos generamos $Con(\mathbf{A})$, las congruencias de $\mathbf{A}$
  - Ejecutamos $\mathtt{AllGlobalKernels}(\mathbf{A}, Con(\mathbf{A}))$
  - Obtenemos un conjunto NO vacío, entonces tiene representaciones globales.

Resultado

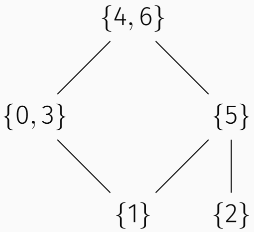
Primer tupla de $\mathtt{\textit{AllGlobalKernels}}(\mathsf{A}, \mathit{Con}(\mathsf{A}))$:

- $\gamma_1 = \mathit{Congruence}(|0, 3|, |1|, |2|, |4, 6|, |5|)$
- $\gamma_2 = \mathit{Congruence}(|0, 4|, |1|, |2|, |3, 6|, |5|)$

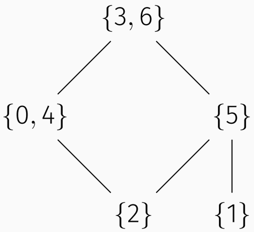
Resultado

Primer tupla de $\texttt{AllGlobalKernels}(\mathbf{A}, \mathit{Con}(\mathbf{A}))$:

- $\gamma_1 = \mathit{Congruence}(|0,3|, |1|, |2|, |4,6|, |5|)$
- $\gamma_2 = \mathit{Congruence}(|0,4|, |1|, |2|, |3,6|, |5|)$



$\mathbf{A}/\gamma_1$



$\mathbf{A}/\gamma_2$

Cómo seguir...

- Mejorar la eficiencia de cómputo.
- Utilizar como herramienta para comprobar resultados teóricos.
- Formular conjeturas a partir de observaciones.

¡Muchas gracias!